

## TD n°4: Principe du maximum et ses conséquences

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini  
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un  sont à faire en priorité, ceux marqués d'un  sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

### Principe du maximum et théorème de Liouville

#### Exercice 1. Autour du principe du maximum.

1. Soit  $f$  une fonction holomorphe définie au voisinage de  $\overline{\mathbb{D}}(0, 1)$  vérifiant  $f(0) = 1$  et  $|f(z)| > 1$  pour  $|z| = 1$ . Démontrer que  $f$  admet un zéro dans  $\mathbb{D}(0, 1)$ .

On procède par l'absurde : si  $f$  n'admet aucun zéro dans le disque, alors  $z \mapsto 1/f(z)$  est une fonction holomorphe au voisinage de  $\mathbb{D}(0, 1)$ . Mais alors  $|1/f(z)| < 1 = |1/f(0)|$  sur  $\partial\mathbb{D}(0, 1)$  : c'est une contradiction avec le principe du maximum.

2. (a) Soit  $U$  un ouvert connexe de  $\mathbb{C}$  et  $f_1, \dots, f_n : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  des fonctions holomorphes. On prend des nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Démontrer que si

$$z \mapsto \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$$

admet un maximum local, alors elle est constante.

On considère  $\log : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$  la détermination principale, associée à la détermination principale de l'argument. On vérifie que  $z \mapsto \exp(\alpha_j \log f_j(z))$  est une fonction holomorphe sur  $U$ , et il en va donc de même de leur produit. Par les propriétés habituelles de l'exponentielle et du log, on a

$$\left| \prod_j f_j(z)^{\alpha_j} \right| = \prod_j |f_j(z)|^{\alpha_j}.$$

On a réalisé  $\prod_j |f_j(z)|^{\alpha_j}$  comme le module d'une fonction holomorphe, et le principe du maximum est donc vérifié.

- (b) (Bonus : plus dur) Même question en remplaçant  $f_j : U \rightarrow \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$  par  $f_j : U \rightarrow \mathbb{C}^*$ .

Cette fois, on ne peut plus utiliser de logarithme global. On note  $\varphi(z) = \sum_j \alpha_j \log |f_j(z)|$ . On va commencer par prouver que si  $\varphi$  admet un maximum local en  $a \in U$ , alors elle est constante sur un voisinage de  $a$ .

En effet, par continuité de  $f_j$ , pour tout  $a \in U$ ,  $\rho > 0$  il existe  $r_j > 0$  tel que  $f_j(\mathbb{D}(a, r_j)) \subseteq \mathbb{D}(f_j(a), \rho)$ . Supposons que  $a$  est un maximum local de  $\varphi$ , posons  $\rho = \min_j |f_j(a)|$ , et  $r$  le minimum des  $r_j$  donnés par la continuité. On a assuré que  $0 \notin \mathbb{D}(f_j(a), \rho)$  et par conséquent on peut définir un logarithme de  $f_j$  sur  $D(a, r)$  en composant  $f_j$  par une détermination du logarithme sur  $\mathbb{D}(f_j(a), \rho)$ . On a alors

$$\varphi(z) = \Re \left( \sum_j \alpha_j \log(f_j) \right).$$

On a donc réalisé  $\varphi$  comme la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un petit ouvert autour de  $a$ , et elle est donc constante au voisinage de  $a$  si c'est un maximum local.

On va maintenant utiliser un argument de connexité pour prouver que  $\varphi$  est constante : on pose

$$X = \{z \in U : \varphi \text{ atteint un maximum local en } z\}.$$

On voit que  $X$  est ouvert dans  $U$  par la preuve qu'on vient de faire : si  $\varphi$  atteint un maximum en  $a \in U$ , elle atteint ce même maximum local sur un voisinage ouvert de  $a$ , et  $X$  est donc voisinage

<sup>†</sup>Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

de tous ses points. Reste à voir que  $X$  est fermé. Pour ce faire, il suffit de trouver une famille d'ouverts  $(U_i)_i$  qui recouvre  $U$  et telle que  $X \cap U_i$  est fermé pour tout  $i$  (c'est un fait de topologie générale que dans un tel cas,  $X$  est fermé ssi  $X \cap U_i$  est fermé pour tout  $i$ ).

On construit ce recouvrement de la façon suivante : si  $a \in U$  est un maximum local de  $\varphi$ , on considère un voisinage  $U_a$  de  $a$  sur lequel  $a$  est un maximum global, et alors  $X \cap U_a = \varphi^{-1}(a) \cap U_a$ . Si  $a \in U$  n'est pas un maximum local, on affirme qu'il existe un voisinage  $U_a$  de  $a$  qui ne contient aucun maximum local.

Par l'absurde, supposons le contraire et considérons  $V$  un voisinage de  $a$  sur lequel  $\sum_j \alpha_j \log f_j$  est définie (par exemple le disque construit plus haut). Cet ouvert contient un maximum local de  $\varphi$ , et donc un ouvert non-vide, disons  $W$ , sur lequel  $\varphi$  est constante. Comme  $\varphi = \sum_j \alpha_j \Re(\log(f_j))$  sur  $V$ , les équations de Cauchy-Riemann nous enseignent la fonction  $\sum_j \alpha_j \log f_j$  est constante sur l'ouvert  $W$  et est donc constante sur tout  $V$  : c'est une contradiction avec le fait que  $a$  n'est pas un maximum local.

$X$  est un ouvert-fermé de  $U$ , et il est non-vide : c'est donc  $U$  tout entier. Il en découle que  $\varphi$  atteint un maximal local en chaque point, et est donc localement constante au voisinage de chaque point, donc constante.

*Remarque : l'exercice se fait beaucoup plus vite avec le principe du maximum pour les fonctions harmoniques, en remarquant que  $\log|f|$  est harmonique pour  $f$  holomorphe.*

Alternative (suggérée par Gaëtan D.) : Soit  $a$  un maximum local de  $\prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$ . On fixe  $\varepsilon > 0$  et  $r > 0$  tel que  $\overline{\mathbb{D}}(a, r) \subseteq U$  et la restriction de  $\prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$  au bord soit inférieure à  $\prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{\alpha_j} - \varepsilon$ .

Les fonctions  $\alpha \in \mathbb{R}^d \mapsto \prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{\alpha_j}$  et  $\alpha \mapsto \sup_{|z-a|=r} \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$  sont des fonctions continues de  $\alpha$ . Ce n'est pas évident, démontrons en toute généralité que si  $\phi : X \times K \rightarrow \mathbb{R}$  est continue avec  $X$  métrique et  $K$  compact métrique, alors  $\psi : x \in X \mapsto \sup_{z \in K} \phi(x, z)$  est continue. Soit  $(x_n)_n$  une suite qui converge vers  $x \in X$ .

On commence par prouver que  $\liminf_n \psi(x_n) \geq \psi(x)$  - en effet,  $\psi(x) = \phi(x, z^*)$  pour un certain  $z^*$  et donc

$$\liminf_n \psi(x_n) \geq \liminf_n \phi(x_n, z^*) = \phi(x, z^*) = \psi(x).$$

Dans l'autre sens, on prouve  $\limsup_n \psi(x_n) \leq \psi(x)$ . Pour ce faire, on se rappelle que

$$\limsup_n \psi(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \psi(x_m) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{m \geq n} \sup_{z \in K} \phi(x_m, z).$$

Mais on a clairement

$$\sup_{m \geq n} \sup_{z \in K} \phi(x_m, z) \leq \sup_{(x, z) \in X_n \times K} \phi(x, z)$$

avec  $X_n = \{x, x_n, \dots\}$  qui est, par définition, compact.

On peut vérifier en toute généralité que pour  $f$  continue et  $(Z_n)_n$  suite décroissante de compacts,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{Z_n} f = \sup_{\bigcap Z_n} f$  - en effet, si  $z_n \in Z_n$  réalise le sup, la suite  $(z_n)$  ne peut s'accumuler que dans  $\bigcap Z_n$ , d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{Z_n} f \leq \sup_{\bigcap Z_n} f$ , et l'inégalité réciproque est évidente.

En l'appliquant à  $Z_n = X_n \times K$ , on a  $\bigcap_n Z_n = \{x\} \times K$  et donc

$$\limsup_n \psi(x_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in X_n \times K} \phi(x_n, z) = \sup_{z \in K} \phi(x, z) = \psi(x).$$

On en déduit que  $\psi$  est continue, et on peut l'appliquer à  $\psi(\alpha) = \sup_{|z-a|=r} \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\alpha_j}$ . Considérons  $\beta \in \mathbb{Q}^d$  suffisamment proche de  $\alpha$  pour que

$$\left| \prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{\alpha_j} - \prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{\beta_j} \right| < \varepsilon/3$$

et également  $|\psi(\alpha) - \psi(\beta)| \leq \varepsilon/3$ . On a donc que

$$\prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{\beta_j} > \sup_{|z-a|=r} \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{\beta_j}$$

et a fortiori, en écrivant  $\beta_j = b_j/N$  avec  $b_j \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N}$ , on a

$$\prod_{j=1}^n |f_j(a)|^{b_j} > \sup_{|z-a|=r} \prod_{j=1}^n |f_j(z)|^{b_j}$$

en élevant à la puissance  $N$ . Ceci contredit la formule de Cauchy pour la fonction holomorphe  $\prod_{j=1}^n f_j^{b_j}$ , ce qui contredit l'existence d'un maximum local.

3. Soit  $U$  un ouvert connexe et  $f \in \mathcal{O}(U)$ . En considérant  $z \mapsto e^{f(z)}$ , démontrer un principe du maximum pour  $\Re(f)$ , c'est-à-dire que si  $\Re(f)$  admet un maximum local sur  $U$ , alors  $f$  est constante.

Comme  $|e^{f(z)}| = e^{\Re f(z)}$ , la fonction  $\Re f$  atteint un maximum local en  $a$  si, et seulement si  $|e^f|$  atteint un maximum local en  $a$ . Dans ce cas,  $|e^f|$  est constante et, en passant au log,  $\Re(f)$  est constante également. Les équations de Cauchy-Riemann permettent de conclure que  $f$  est constante.



### Exercice 2. Croissance comparée de fonctions entières.

Soient  $f, g$  des fonctions entières vérifiant  $|f(z)| \leq |g(z)|$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Démontrer que  $f = \lambda g$  pour un certain  $\lambda$ .

Si  $g$  est la fonction nulle, alors  $f$  aussi et le résultat est trivial. On suppose  $g$  non-nulle. On définit, pour  $a \in \mathbb{C}$  tel que  $g(a) \neq 0$ ,  $h(z) = f(z)/g(z)$ .

Si  $a$  est un zéro de  $g$ , il doit aussi être un zéro de  $f$ . Mieux : si  $a$  est un zéro d'ordre  $k$  de  $g$ , alors  $g(z)/(z-a)^k$  est bornée au voisinage de  $a$  et donc  $f(z)/(z-a)^k$  est bornée également au voisinage de  $a$ , donc  $a$  est un zéro d'ordre  $k$  de  $f$ .

On peut donc étendre  $h$  au voisinage de chaque zéro de  $g$ , et on obtient une fonction entière. Cette fonction entière est bornée par 1 (elle l'est sur l'ouvert dense  $g \neq 0$ ), donc constante par le théorème de Liouville.

### Exercice 3. L'inégalité de Carathéodory.

Soit  $f$  une fonction entière. On pose

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|, \quad A(r) = \sup_{|z|=r} \Re f(z).$$

1. Démontrer que  $M$  et  $A$  sont des fonctions continues croissantes de  $r$ , et qu'elles sont strictement croissantes si  $f$  n'est pas constante (on pourra se rappeler que  $\Re f$  vérifie aussi le principe du maximum).

La croissance de  $M$  et  $A$  découle du principe du maximum. La croissance implique l'existence des limites à droite et à gauche. En considérant  $z$  de module  $r$  qui réalise  $M(r)$ , on a

$$M(r) = \lim_{\varepsilon > 0} |f(z(1 - \varepsilon/r))| \leq \lim_{\varepsilon > 0} M(r - \varepsilon) \leq M(r).$$

Reste à voir que  $\lim_{\varepsilon > 0} M(r + \varepsilon) = M(r)$  : si on considère une suite  $(z_n)_n$  de nombres complexes de module  $> r$  vérifiant  $|z_n| \rightarrow r$  et  $|f(z_n)| = M(|z_n|)$ , on peut extraire une sous-suite convergente vers un  $z$  de module  $r$ . On vérifie alors que

$$\lim_{\varepsilon > 0} M(r + \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(|z_n|) = |f(z)| \leq M(r).$$

La croissance stricte découle encore une fois du principe du maximum : si  $M(r) = M(r')$ ,  $r < r'$ , alors  $M(r)$  est un maximum local de  $|f|$  et  $f$  est constante (le même raisonnement fonctionne pour  $\Re f$ ).

2. Supposons que  $f(0) = 0$ . On définit  $g$  par

$$g : z \mapsto \frac{f(2rz)}{2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)}.$$

Démontrer que  $g$  envoie le disque unité dans lui-même.

Soit  $z \in \mathbb{D}$ , on écrit  $f(rz) = p + iq$ . Alors

$$2A(2r) + \varepsilon - f(2rz) = A(2r) + \varepsilon + (A(2r) - p) - iq.$$

Comme  $|z| < 1$ , on a  $A(2r) - p \geq 0$ , et donc

$$|2A(2r) + \varepsilon - f(2rz)|^2 \geq (A(2r) + \varepsilon)^2 + q^2 > p^2 + q^2 = |f(z)|^2$$

donc  $|g(z)| < 1$ .

3. Démontrer à l'aide du lemme de Schwarz que  $M(r) \leq 2A(2r)$ .

Comme  $g(0) = f(0)/(2A(2r) + \varepsilon - f(0)) = 0$ , le lemme de Schwarz assure que  $|g(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , donc (en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ ) :

$$|f(2rz)| \leq |z|(2A(2r) + |f(2rz)|)$$

car  $A(2r) \geq A(0) = 0$ . On réarrange, et on obtient

$$(1 - |z|)|f(2rz)| \leq |z|2A(2r).$$

En appliquant cette inégalité à  $u/2$  avec  $|u| = 1$ , on trouve finalement  $f(ru) \leq 2A(2r)$ , et donc  $M(r) \leq 2A(2r)$ .

4. Démontrer que si  $f$  est une fonction entière telle qu'il existe des constantes  $A, K, \alpha$  telles que

$$\Re f(z) \leq A|z|^\alpha + K$$

pour  $z$  assez grand, alors  $f$  est un polynôme.

On considère  $g(z) = f(z) - f(0)$ , qui s'annule en 0 et vérifie  $|g(z)| \leq |f(z)| + |f(0)|$ . On trouve donc, pour  $r$  assez grand :

$$M_g(r) \leq M_f(r) + |f(0)| \leq 2A_f(2r) + |f(0)| \leq 2^{1+\alpha}Ar^\alpha + K + |f(0)|.$$

C'est suffisant pour conclure que  $f$  est un polynôme de degré  $\leq |\alpha|$ .



#### Exercice 4. Autour du théorème de Liouville.

1. Soit  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  vérifiant  $f^{(k)}(0) = 0$  pour  $k = 0, \dots, N$  et  $|f(z)| \leq C|z|^N$  pour  $|z| \gg 0$ . Démontrer que  $f$  est nulle.

On considère la fonction  $g : z \mapsto f(z)/z^N$ , qui est bien définie au voisinage de 0 à cause des conditions sur les  $f^{(k)}$ ,  $k < N$ , c'est une fonction entière. Soit  $R > 0$  tel que  $|f(z)/z^N| \leq C$  pour  $|z| \geq R$ . on a  $|g(z)| \leq \max(C, \max_{|z| \leq R} |g|) < \infty$  : par le théorème de Liouville,  $g$  est constante. Comme  $g(0) = f^{(N)}(0) = 0$ ,  $g$  est nulle.

2. Soit  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  à croissance polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $|f(z)| \leq P(|z|)$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . Démontrer que  $f$  est un polynôme. Si  $P$  est de degré  $d$ , on considère  $g(z) = f(z) - Q(z)$  où  $Q(z) = f(0) + f'(0)z + \dots + \frac{f^{(d)}(0)}{d!}z^d$ . On a  $g(0) = \dots = g^{(d)}(0) = 0$  et

$$|g(z)| \leq P(|z|) + |Q(z)|.$$

Pour  $|z|$  assez grand, on a donc  $|g(z)| \leq C|z|^d$  pour une constante  $C$  (il suffit de prendre  $C$  supérieur à la somme des coefficients dominants de  $P$  et  $|Q|$ ), et elle vérifie donc les hypothèses de la question précédente : elle est nulle, et  $f(z) = Q(z)$

3. Soit  $f$  une fonction entière qui ne s'annule pas, et vérifiant qu'il existe des constantes  $C, A > 0$  telles que

$$|f(z)| \leq Ce^{A|z|^d}$$

pour tout  $z$  assez grand. Démontrer que  $f(z) = e^{P(z)}$  pour  $P$  polynôme de degré  $\leq d$  (on pourra utiliser la dernière question de l'exercice précédent).

Il existe une fonction holomorphe  $L : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f(z) = e^{L(z)}$ , on peut par exemple la définir par

$$L(z) = \int_0^z \frac{f'(w)}{f(w)} dw.$$

On a  $|f(z)| \leq e^{\Re L(z)}$ , donc  $\Re L(z) \leq A|z|^d + \log(C)$ . L'exercice précédent implique que  $L$  est une fonction polynomiale de degré  $\leq d$ .

4. Démontrer que pour tout  $P \in \mathbb{C}[X]$ , l'équation  $e^z = P(z)$  admet une infinité de solutions.

Si  $\deg(P) = 0$ , le résultat est immédiat, on suppose  $\deg(P) \geq 1$ . Supposons par l'absurde que  $e^z = P(z)$  admet un nombre fini de solutions : la fonction  $z \mapsto e^z - P(z)$  est une fonction entière s'annulant seulement en un nombre fini de points  $a_1, \dots, a_r$  avec multiplicités  $m_1, \dots, m_r$ .

On pose  $Q(z) = \prod_j (z - a_j)^{m_j}$  : la fonction  $f : z \mapsto \frac{e^z - P(z)}{Q(z)}$  est une fonction entière ne s'annulant pas.

Comme  $|f(z)| \leq e^{2|z|}$ , la question précédente prévoit que  $f(z) = e^{az+b}$  pour certains  $a, b \in \mathbb{C}$ .

Comme  $|f(t)| \sim Ce^{t \deg(Q)} = e^{\Re(a)t + \Re(b)}$  quand  $t \rightarrow \infty$ , on trouve  $\deg(Q) = 0$  et  $\Re(a) = 1$ .

On trouve donc  $e^z - P(z) = e^{az}$ , ce qui est impossible sauf si  $a = 1$  et  $P = 0$ . L'équation  $e^z = P(z)$  admet donc bien une infinité de solutions.

### Exercice 5. Théorème des trois cercles et des trois droites de Hadamard.

1. Soit  $r_1$  et  $r_2$  deux réels positifs et  $f$  une fonction holomorphe définie sur l'anneau  $\{z \in \mathbb{C}, r_1 < |z| < r_2\}$  et s'étendant continument à son adhérence. Pour tout  $r \in [r_1, r_2]$ , on note :

$$M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|.$$

On veut montrer que  $\log M$  est une fonction convexe de  $\log(r)$ .

- (a) Démontrer que  $\log M$  est une fonction convexe de  $\log(r)$  si, et seulement si pour  $r < R$ ,  $\rho \in [r, R]$ , on a

$$\log M(\rho) \leq \frac{\log(\rho) - \log(r)}{\log(R) - \log(r)} \log M(R) + \frac{\log(R) - \log(\rho)}{\log(R) - \log(r)} \log M(r).$$

On pose  $t = \frac{\log(\rho) - \log(r)}{\log(R) - \log(r)}$  : c'est l'unique réel tel que  $\log(\rho) = t \log(R) + (1-t) \log(r)$ , et on a  $1-t = \frac{\log(R) - \log(\rho)}{\log(R) - \log(r)}$ . Ainsi, l'inégalité donnée dans l'énoncé est équivalente à

$$\log M(R^t r^{1-t}) \leq t \log M(R) + (1-t) \log M(r).$$

L'inégalité de l'énoncée est vraie pour tout  $\rho$  si et seulement si cette inégalité ci-dessus est vraie pour tout  $t$ , et donc  $\log M$  est convexe en  $\log(r)$ .

- (b) Démontrer pour  $\beta \in \mathbb{Q}$ , on a

$$\rho^\beta M(\rho) \leq \max(r^\beta M(r), R^\beta M(R)).$$

En déduire que la même égalité est vraie pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$ .

On écrit  $\beta = p/q$  avec  $q > 0$ , et on applique le principe du maximum à  $z \mapsto z^p f(z)^q$ , ce qui donne

$$\rho^p M(\rho)^q \leq \max(r^p M(r)^q, R^p M(R)^q)$$

pour  $r \leq \rho \leq R$ . On passe ensuite à la puissance  $1/q$  pour avoir la conclusion pour tout rationnel, et on a la conclusion pour tout  $\beta \in \mathbb{R}$  par passage à la limite.

- (c) Conclure en appliquant le lemme précédent à un  $\alpha$  tel que  $r^\alpha M(r) = R^\alpha M(R)$ .

On peut calculer qu'un tel  $\alpha$  est donné par

$$\alpha = \frac{\log M(R) - \log M(r)}{\log(R) - \log(r)}.$$

On a donc

$$\alpha \log(\rho) + \log M(\rho) \leq \alpha \log(r) + \log M(r)$$

et on vérifie que

$$\alpha(\log(r) - \log(\rho)) + \log M(r) = t \log M(R) + (1-t) \log M(r)$$

pour le  $t$  donné à la question (a).

2. Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux réels et  $f$  une fonction holomorphe sur  $B = \{z \in \mathbb{C}, x_1 < \Re(z) < x_2\}$ , bornée et s'étendant continuellement à  $\overline{B}$ . Pour tout  $x \in [x_1, x_2]$ , on note:

$$M(x) = \sup_{\Re(z)=x} |f(z)|.$$

On va prouver que  $\log M$  est une fonction convexe de  $x$ .

- (a) Démontrer qu'il suffit de montrer que dans le cas  $x_0 = 0, x_1 = 1$ , on a

$$M(t) \leq M(0)^{1-t} M(1)^t.$$

Si l'on veut prouver la convexité sur l'intervalle  $[a, b]$  dans une bande, on réalise le changement de variable  $u = a + (b - a)z$  pour se ramener à  $a = 0, b = 1$ .

- (b) Prouver le résultat dans ce cas en considérant la fonction holomorphe

$$z \mapsto \frac{f(z)}{M(0)^{1-z} M(1)^z (1 + \varepsilon z)}.$$

On considère, pour  $T > 0$ , le rectangle  $R_T = [0, 1] + i[-T, T]$ . Pour  $T \gg 0$ ,  $f$  atteint son maximum sur les bords verticaux de  $R_T$  car  $\frac{f(z)}{M(0)^{1-z} M(1)^z (1 + \varepsilon z)}$  est bornée sur la bande verticale et  $\frac{1}{1 + \varepsilon z} \rightarrow 0$  quand  $z \rightarrow \infty$ . Il en découle que pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $y \in \mathbb{R}$  on a

$$\frac{|f(t + iy)|}{M(0)^{1-t} M(1)^t |1 + \varepsilon(t + iy)|} \leq 1$$

car  $\left| \frac{f(iy)}{M(0)(1 + \varepsilon iy)} \right| \leq 1$  et  $\left| \frac{|f(1 + iy)|}{M(1)(1 + \varepsilon(1 + iy))} \right| \leq 1$  par construction.

Il suffit maintenant de prendre  $\varepsilon \rightarrow 0$  et de prendre, à  $t$  fixé, le sup sur  $y \in \mathbb{R}$  pour obtenir le résultat désiré.

3. Prouver le théorème des trois cercles à partir du théorème des trois droites en considérant  $z \mapsto f(e^z)$  sur une bande appropriée. On considère la fonction  $z \mapsto f(e^z)$  sur la bande  $\log(r_1) \leq \Re(z) \leq \log(r_2)$ , les droites verticales sont envoyées sur des cercles. On a  $\sup_{|z|=r} |f(z)| = \sup_{\Re(u)=\log(r)} |f(e^u)|$ , ce qui conclut sur la convexité en  $\log(r)$ .

## Lemme de Schwarz et disque unité



### Exercice 6. Bornes supérieure de dérivées.

Soit  $\mathcal{F}$  la famille des fonctions holomorphes sur  $\mathbb{D}$  vérifiant  $0 < |f| < 1$ , et  $\mathcal{F}_c$  celles vérifiant de plus  $|f(0)| = c$ . Le but de cet exercice est d'étudier  $\sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$  et  $\sup_{f \in \mathcal{F}_c} |f'(0)|$ .

1. Justifier que l'on peut se restreindre aux  $f \in \mathcal{F}$  (resp.  $\mathcal{F}_c$ ) telles que  $f(0) > 0$ .

La dérivée de  $e^{i\theta} f$  est  $e^{i\theta} f'$ , ce qui ne change pas la valeur de  $|f'(0)|$ .

A partir de maintenant, on fixe  $f \in \mathcal{F}_c$  vérifiant  $f(0) = c$ .

2. Démontrer qu'il existe  $g : \mathbb{D} \rightarrow \{\Re(z) < 0\}$  telle que  $e^g = f$  et  $g(0) = \log(c)$ . Calculer  $g'(0)$  en fonction de  $f'(0)$ .

Comme  $f \neq 0$ , elle admet un logarithme  $g$ , et quitte à enlever  $2ki\pi$ , on peut supposer  $g(0) = \log(c)$ . Comme  $|f| < 1$ , on a  $|e^g| = e^{\Re(g)} < 1$  donc  $\Re(g) < 0$ . Comme  $e^g = f$ , on a  $g'(0)e^{g(0)} = f'(0)$ , donc  $g'(0) = f'(0)/c$ .

On rappelle que  $h : z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$  est un biholomorphisme entre  $\Re(z) < 0$  et  $\mathbb{D}$ .

3. On pose  $b = h \circ g(0)$ . Calculer la dérivée de  $h \circ g$  en 0, puis celle de  $\psi = \phi_{-b} \circ h \circ g$  en 0.

Comme  $h(z) = 1 + \frac{2}{z-1}$ , on a  $h'(z) = -\frac{2}{(z-1)^2}$  et donc  $(h \circ g)'(0) = -\frac{2g'(0)}{(\log(c)-1)^2}$ .

Pour le calcul suivant, il faut remarquer que  $\phi'_{-b}(b) = \frac{1}{1-b^2}$  ( $b$  est réel car  $b = \frac{\log(c)+1}{\log(c)-1}$ ). Un simple calcul suffit à le démontrer, en effet

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{z-b}{1-bz} \right) = \frac{1-bz + b(z-b)}{(1-bz)^2} = \frac{1-b^2}{(1-bz)^2}.$$

On en conclut que  $\psi'(0) = \phi'_{-b}(b)(h \circ g)'(0) = -\frac{1}{1-b^2} \cdot \frac{2f'(0)}{c(\log(c)-1)^2}$ .

4. Conclure à l'aide du lemme de Schwarz.

Remarquons que  $\psi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est holomorphe et s'annule en 0 - ainsi,  $|\psi'(0)| \leq 1$ , avec égalité si et seulement si  $\psi(z) = e^{i\theta}z$ .

Il en découle que

$$|f'(0)| \leq \frac{1}{2}(1-b^2)c(\log(c)-1)^2$$

avec égalité si et seulement si  $f(z) = e^{h \circ \phi_b(z)}$  (car  $h = h^{-1}$ ).

Avec quelques manipulations,  $\frac{1}{2}(1-b^2)c(\log(c)-1)^2 = -2c \log(c)$ , qui est donc le supremum pour  $\mathcal{F}_c$  (il est atteint par la fonction  $f$  exhibée ci-dessus).

Pour  $\mathcal{F}$ , il suffit de prendre le supremum sur les  $c$  : la fonction  $c \mapsto -2c \log(c)$  atteint son maximum en  $c = e^{-1}$ , et il vaut  $2e$ , c'est donc le maximum que l'on puisse atteindre.

### Exercice 7. Variations du lemme de Schwarz.

Soient  $M \geq 0$ ,  $\mathbb{D}$  le disque unité,  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ .

1. Supposons que  $|f(z)| \leq M$  sur  $\mathbb{D}$ . Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{D}$  on a

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{1-|z|}.$$

On applique la formule de Cauchy à  $\partial\mathbb{D}(0, r)$  pour  $r > |z|$  :

$$f'(z) \leq \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{i\theta})|}{|re^{i\theta} - z|} d\theta \leq \frac{rM}{r-|z|}.$$

On prend  $r \rightarrow 1$  et on obtient le résultat.

2. Supposons qu'il existe  $k > 0$  tel que  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(k-1)}(0) = 0$  et que  $|f(z)| \leq M$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . Montrer qu'alors :

$$|f(z)| \leq M|z|^k$$

Que peut-on dire s'il existe  $a \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$  tel que  $|f(a)| = M|a|^k$ ?

$z \mapsto f(z)/z^k$  est bien définie sur  $\mathbb{D}$ , et par principe du maximum on a  $|f(z)/z^k| \leq M/r^k$  pour tout  $r < 1$ , donc en prenant  $r \rightarrow 1$  :

$$|f(z)| \leq M|z|^k.$$

Si l'égalité a lieu,  $f(z)/z^k$  a un maximum local et est donc constante, donc  $f(z) = \alpha z^k$ .

3. On suppose que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  et  $|f(z)| \leq M$  sur  $\mathbb{D}$ . Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on a

$$|f(z)| \leq M|z|, \quad |f(z) - z| \leq (M+1)|z|^2.$$

$|f(z)| \leq M|z|$  découle de la question précédente. On pose  $g(z) = f(z) - z$  : elle vérifie l'estimation  $|g(z)| \leq M+1$  et  $g(0) = g'(0) = 0$ . Par la question précédente  $|g(z)| \leq M|z|^2$ .

4. On suppose que  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = 1$  et  $|f'(z)| \leq M$  sur  $\mathbb{D}$ . Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on a

$$|f'(z) - 1| \leq (M+1)|z|.$$

Montrer à l'aide de l'inégalité des accroissements finis que

$$|f(z)| \leq M|z|, \quad |f(z) - z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2.$$

$|f'(z) - 1| \leq (M+1)|z|$  découle encore une fois de la question 2. On applique l'IAF à  $t \mapsto f(tz)$ , dont la dérivée est  $zf'(tz)$  sur  $[0, 1]$  et on obtient

$$|f(z)| = |f(z) - f(0)| \leq \sup |zf'(tz)| \leq M|z|.$$

On considère  $p(t) = f(tz) - tz$ , de dérivée  $p'(t) = zf'(tz) - z$ , qui vérifie  $|p'(t)| \leq |z| \cdot |f'(tz) - 1| \leq (M+1)t|z|^2$ . On intègre entre 0 et 1 pour obtenir

$$|p(1) - p(0)| = |f(z) - z| \leq \frac{M+1}{2}|z|^2.$$

**Exercice 8. Le groupe des biholomorphismes de  $\mathbb{D}$ .**

Dans cet exercice, on note  $\phi_a$  l'automorphisme de  $\mathbb{D}$  donné par  $\phi_a(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ . On note  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  le groupe des biholomorphismes de  $\mathbb{D}$ .

1. Démontrer que le produit  $a * b = \frac{a+b}{1+\bar{a}b}$  définit une structure de groupe sur  $\mathbb{D}$ .  
La façon évidente de faire est de vérifier que  $\phi_b \circ \phi_a = \phi_{a*b}$ , ce qui se fait sans encombre au prix d'un peu de calcul.
2. Vérifier que l'application  $a \mapsto \phi_a$  définit un morphisme de groupes de  $(\mathbb{D}, *)$  vers  $\text{Aut}(\mathbb{D})$ , d'image normale.  
Le point crucial ici est que le sous-groupe des  $\phi_a$  est normal. En effet, on sait que tout élément de  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  s'écrit comme  $\rho \circ \phi_a$ , où  $\rho$  est une rotation  $z \mapsto e^{i\theta}z$ , et il suffit donc de vérifier que  $\rho \phi_a \rho^{-1} = \phi_{\rho(a)}$ .
3. En déduire que  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  est un produit semi-direct de  $(\mathbb{D}, *)$  par  $\mathbb{U}$  pour une action que l'on précisera.  
 $\mathbb{U}$  agit sur  $\mathbb{D}$  par rotations. Pour vérifier que cette action induit bien un produit semi-direct, il suffit de se rappeler que tout élément de  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  s'écrit de manière unique comme composition d'une rotation et d'un  $\phi_a$ .

**🐼 Exercice 9. Lemme de Schwarz-Pick.**

1. Soit  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous  $z, w \in \mathbb{D}$ , on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{1 - \overline{f(w)}f(z)} \right| \leq \left| \frac{z - w}{1 - \bar{w}z} \right|$$

et

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}.$$

Préciser le cas d'égalité.

On considère  $F : z \mapsto \frac{z-w}{1-\bar{w}z}$  et  $G : z \mapsto \frac{z-f(w)}{1-\overline{f(w)}z}$ , et on veut montrer que  $|F(f(z))| \leq |G(z)|$ , ou encore  $|F(f(G^{-1}(z)))| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . On vérifie que  $G(w) = 0$  et donc  $F \circ f \circ G^{-1}(0) = F(f(w)) = 0$ , donc le lemme de Schwarz s'applique.

La majoration  $|f'(w)| \leq \frac{1-|f(w)|^2}{1-|w|^2}$  s'obtient en constatant que  $|g'(0)| \leq 1$  (pas d'astuce, juste un calcul un peu long ici).

Si on a égalité dans un des deux cas, alors  $g(z) = e^{i\theta}z$ , donc  $F(f(z)) = e^{i\theta}G(z)$  et donc  $f(z) = F^{-1}(e^{i\theta}G(z))$ .

2. Soit  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  une fonction holomorphe. Démontrer que pour tous  $z, w \in \mathbb{H}$ , on a

$$\left| \frac{f(z) - f(w)}{\overline{f(z)} - \overline{f(w)}} \right| \leq \left| \frac{z - w}{\bar{z} - \bar{w}} \right|$$

et

$$\frac{|f'(z)|}{\Im f(z)} \leq \frac{1}{\Im(z)}.$$

Préciser le cas d'égalité.

Pour faire la question, il faut transférer le lemme de Schwarz sur le demi-plan de Poincaré, par exemple avec l'homographie  $h(z) = i\frac{1+z}{1-z}$ . On considère donc les biholomorphismes réciproques

$$h(z) = i\frac{1+z}{1-z}, \quad l(z) = h^{-1}(z) = \frac{z-i}{z+i}.$$

La fonction holomorphe donnée par  $g(z) = lf(z)$  est une fonction du disque dans lui-même, et la question précédente s'applique : on a

$$\left| \frac{lf(z) - lf(w)}{1 - \overline{lf(w)}lf(z)} \right| \leq \left| \frac{l(z) - l(w)}{1 - \overline{l(w)}l(z)} \right|.$$

Reste seulement à prouver que  $\left| \frac{l(z)-l(w)}{1-\overline{l(w)}l(z)} \right| = \left| \frac{z-w}{z-\overline{w}} \right|$  pour conclure. Un calcul explicite fonctionne très bien, mais on peut fonctionner autrement : on sait que  $G \circ l$  est une homographie qui envoie  $w$  sur  $0$ ,  $\overline{w}$  sur  $\infty$  (on vérifie en effet que  $\overline{l(w)} = 1/\overline{l(\overline{w})}$ ) et  $l(\infty) = 1$ .

De là, on sait (prouvé ci-dessous) qu'il existe, pour  $A, B, C \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  distincts,  $P, Q, R \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  distincts, une unique homographie qui envoie  $A, B, C$  sur  $P, Q, R$  respectivement (on dit que le groupe  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$  est strictement 3-transitif).

Ce fait permet de déduire que  $G \circ l(z) = \frac{z-w}{z-\overline{w}}$  !

*Preuve du fait* : il suffit de prouver qu'il existe une unique homographie qui envoie  $0, 1, \infty$  sur  $P, Q, R$ , et de considérer la composition de l'homographie envoyant  $A, B, C$  sur  $0, 1, \infty$  et  $0, 1, \infty$  sur  $P, Q, R$ .

L'unicité découle du fait que si on a deux homographies qui envoient  $A, B, C$  sur  $P, Q, R$ , on peut les précomposer par une homographie qui envoie  $A, B, C$  sur  $0, 1, \infty$  (l'inverse de celle qui envoie  $0, 1, \infty$  sur  $A, B, C$ ) et ainsi obtenir deux homographies qui envoient  $0, 1, \infty$  sur  $P, Q, R$ , qui sont donc les mêmes.

La condition  $f(0) = P$ ,  $f(\infty) = R$  fixe  $b/d = P$ ,  $a/c = R$  (à comprendre  $d = 0$  si  $P = \infty$ ,  $c = 0$  si  $R = \infty$ ).

Si  $P, Q, R$  ne sont pas l'infini, on obtient  $b = dP$ ,  $a = cR$  et donc  $f(1) = \frac{cR+dP}{c+d} = Q$ .

En réarrangeant, on obtient  $c = d \frac{P-Q}{R-Q}$ . On a donc exprimé tous les coefficients de l'homographie comme un multiple de  $d$ , et on peut simplifier par  $d$ . On vérifie ensuite que l'homographie obtenue a bien les propriétés désirées.

Les cas où  $P, Q$  ou  $R$  est  $\infty$  sont ensuite réglés individuellement : si  $P = \infty$ , on a  $d = 0$  et  $b$  arbitraire, et on trouve  $\frac{cR+b}{c} = Q$ , donc  $b = c(R - Q)$  et tous les coefficients sont écrits comme multiples de  $c$ . Le cas  $R = \infty$  donne  $c = 0$ , l'évaluation en 1 donne  $\frac{a+dP}{d} = Q$ , et donc  $a = d(Q - P)$ . Le cas  $Q = \infty$  donne  $c + d = 0$  donc  $c = -d$ .

*Remarque* : cette observation est cohérente avec le fait que  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^\times$  est de dimension complexe  $\dim(\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})) - \dim(\mathbb{C}^\times) = 4 - 1 = 3$  : un élément de  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ , c'est-à-dire une homographie, est entièrement (et uniquement) décrite par trois paramètres complexes  $P, Q$  et  $R$  !